



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年创始人专注教育行业

QUANPIN DUANPINGKUAI 全品短平快

主编 肖德好

热点题型突破

数学
YN



延边教育出版社



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年创始人专注教育行业

全品短平快

----- 本册主编 -----

张华齐

----- 编 者 -----

张华齐 王 庶 吴 跃

----- 特约主审 -----

杨应曙 李 明

主编 肖德好

数学
YN



延边教育出版社

CONTENTS

目录

题型 I 小题·针对练

小题 1	集合与常用逻辑用语、复数	001	小题 14	递推数列与数列应用	014
小题 2	不等式的性质与基本不等式	002	小题 15	空间几何体的表面积与体积	015
小题 3	函数图象与函数解析式	003	小题 16	空间几何体与球的切接问题	016
小题 4	基本初等函数、函数与方程	004	小题 17	空间位置关系	017
小题 5	函数的性质	005	小题 18	立体几何的截面、轨迹和折叠问题	018
小题 6	导数的几何意义	006	小题 19	直线与圆、圆与圆的位置关系	019
小题 7	导数与函数的单调性、极值、最值	007	小题 20	圆锥曲线的概念与基本性质	020
小题 8	导数中的函数构造问题	008	小题 21	离心率	021
小题 9	三角恒等变换	009	小题 22	圆锥曲线的综合问题	022
小题 10	三角函数的图象与性质	010	小题 23	排列组合与二项式定理	023
小题 11	平面向量	011	小题 24	古典概型与事件的独立性	024
小题 12	解三角形	012	小题 25	条件概率与全概率公式	025
小题 13	等差数列、等比数列的基本量与基本性质	013	小题 26	随机变量及其分布	026
			小题 27	统计与成对数据的统计分析	027

题型 II 解答·针对练

解答 1	三角函数的性质及应用	029	解答 14	概率与统计中数字特征、统计图	042
解答 2	利用正、余弦定理判定三角形形状	030	解答 15	相关性与回归模型、独立性检验	043
解答 3	证明三角形中的恒等式或不等式	031	解答 16	条件概率与全概率公式	045
解答 4	求三角形中的边长、周长、面积的最值或范围	032	解答 17	随机变量及其分布	046
解答 5	平面几何图形中的计算	033	解答 18	概率与统计的综合应用	047
解答 6	立体几何中的空间角	034	解答 19	直线与圆、圆与圆锥曲线	049
解答 7	立体几何中的空间距离	035	解答 20	圆锥曲线中的定点、定值、定直线问题	050
解答 8	立体几何中的翻折问题	036	解答 21	圆锥曲线中的探索性问题	051
解答 9	立体几何中动点存在问题	037	解答 22	圆锥曲线中的范围与最值问题	052
解答 10	等差、等比数列通项、求和问题	038	解答 23	导数与函数的单调性、极值与最值问题	053
解答 11	数列的求和问题	039	解答 24	导数与函数零点、极值点问题	054
解答 12	数列的证明	040	解答 25	函数与导数中的恒成立、有解问题	055
解答 13	数列的综合应用	041	解答 26	函数与导数中的不等式证明	056

题型 III 教考衔接·拓展练

拓展 1	集合与事件关系	057	拓展 6	直线方程	062
拓展 2	反函数	058	拓展 7	截面中的圆锥曲线	063
拓展 3	三次函数	059	拓展 8	圆锥曲线的光学性质	065
拓展 4	海伦和秦九韶	060	拓展 9	牛顿法与代数基本定理	067
拓展 5	祖暅原理	061	拓展 10	概率与数列	068

考卷 I 小题 · 标准练

小题 1	“8+3+3” 73 分练	专 01 / 答 61
小题 2	“8+3+3” 73 分练	专 03 / 答 62
小题 3	“8+3+3” 73 分练	专 05 / 答 62
小题 4	“8+3+3” 73 分练	专 07 / 答 64
小题 5	“8+3+3” 73 分练	专 09 / 答 65
小题 6	“8+3+3” 73 分练	专 11 / 答 66
小题 7	“8+3+3” 73 分练	专 13 / 答 67
小题 8	“8+3+3” 73 分练	专 15 / 答 68
小题 9	“8+3+3” 73 分练	专 17 / 答 70
小题 10	“8+3+3” 73 分练	专 19 / 答 71
小题 11	“8+3+3” 73 分练	专 21 / 答 72
小题 12	“8+3+3” 73 分练	专 23 / 答 73

考卷 II 解答 · 标准练

解答 1	“15~17 题” 43 分练	专 25 / 答 74
解答 2	“15~17 题” 43 分练	专 27 / 答 75
解答 3	“15~17 题” 43 分练	专 29 / 答 76
解答 4	“15~17 题” 43 分练	专 31 / 答 77
解答 5	“15~17 题” 43 分练	专 33 / 答 77
解答 6	“15~17 题” 43 分练	专 35 / 答 78
解答 7	“15~17 题” 43 分练	专 37 / 答 79
解答 8	“15~17 题” 43 分练	专 39 / 答 79
解答 9	“15~17 题” 43 分练	专 41 / 答 80
解答 10	“15~17 题” 43 分练	专 43 / 答 80
解答 11	“15~17 题” 43 分练	专 45 / 答 81
解答 12	“15~17 题” 43 分练	专 47 / 答 81
解答 13	“18 题、19 题” 34 分练	专 49 / 答 82
解答 14	“18 题、19 题” 34 分练	专 51 / 答 83
解答 15	“18 题、19 题” 34 分练	专 53 / 答 83
解答 16	“18 题、19 题” 34 分练	专 55 / 答 84
解答 17	“18 题、19 题” 34 分练	专 57 / 答 85
解答 18	“18 题、19 题” 34 分练	专 59 / 答 86

小题 1 集合与常用逻辑用语、复数

(时间:30 分钟 分值:62 分)

一、单选题

1. [2025·广东佛山二模] 已知集合 $A = \{x | 2 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 3 < x < 10\}$, 则 $A \cup B =$ ()

A. $\{x | 2 \leq x < 7\}$
B. $\{x | 2 \leq x < 10\}$
C. $\{x | 3 < x < 7\}$
D. $\{x | 3 < x < 10\}$

2. [2025·山东泰安模拟] 已知复数 z 满足 $(3 - \sqrt{2}i)z = 11$, i 为虚数单位, 则复数 $\bar{z}$ 的虚部为 ()

A. $\sqrt{2}i$ B. $\sqrt{2}$
C. $-\sqrt{2}i$ D. $-\sqrt{2}$

3. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, 3^x < x^3$, 命题 $q: \exists x > 0, \sin x + \cos x = 0$, 则 ()

A. p 和 q 都是真命题
B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题
D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

4. [2025·宁夏银川三模] 已知集合 $A = \{x | \ln x < 1\}$, 集合 $B = \{x | 2^{x-1} > 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $(1, e)$ B. $(-\infty, e)$
C. $(-\infty, 1)$ D. $(0, e)$

5. [2025·北京海淀区三模] 在复平面内, 复数 $\frac{2}{1+i} - i^{2025}$ 对应的点位于 ()

A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

6. [2025·江苏徐州模拟] 已知 $A = \{-1, \frac{1}{2}\}$, $B = \{x | ax + 1 = 0\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 a 的取值构成的集合是 ()

A. $\{-1, 2\}$ B. $\{-2, 1\}$
C. $\{-2, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

7. [2025·河北秦皇岛模拟] 已知复数 z 满足 $z + \frac{2}{z} = -2$, 则 $|z| =$ ()

A. 1 B. $\sqrt{2}$
C. $\sqrt{3}$ D. 2

8. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | \frac{x+2}{x-2} \leq 0\}$, $B = \{x | \log_2 x \geq a\}$, 若 $B \subseteq (\complement_U A)$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2]$ B. $[2, +\infty)$
C. $(2, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

二、多选题

9. [2025·福建宁德模拟] 已知 p : 关于 x 的不等式 $x^2 - 2ax - a > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 那么 p 的一个必要不充分条件是 ()

A. $-1 < a < -\frac{1}{2}$
B. $-\frac{2}{3} < a < 0$
C. $-1 \leq a \leq 0$
D. $a \geq -1$

10. [2025·湖北黄冈三模] 已知复数 $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, 则下列等式恒成立的是 ()

A. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
B. $|z_1 \pm z_2| = |z_1| \pm |z_2|$
C. $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 \pm 2|z_1 \cdot z_2| + |z_2|^2$
D. $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

三、填空题

11. [2025·福建福州模拟] 已知复数 $z = (a^2 - 4) + (a - 2)i$ ($a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位) 是纯虚数, 则 $a =$ _____.

12. 已知命题 $p: " \forall x \geq 1, x^3 - \frac{2}{x} - a > 0 "$ 的否定为真命题, 则 a 的取值范围为 _____.

题号
答案区

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

班级	
姓名	
题号	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

小题2 不等式的性质与基本不等式

(时间:30分钟 分值:62分)

一、单选题

- [2025·云南昭通模拟] 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}, b > c$, 则下列不等式恒成立的是 ()
 A. $a + b^2 > a + c^2$ B. $a^2 + c < a^2 + b$
 C. $ab > ac$ D. $a^2c < a^2b$
- 已知 x, y 均为正数, 则 $\frac{2x^2 + 3y^2}{xy}$ 的最小值为 ()
 A. 4 B. $3\sqrt{2}$
 C. 3 D. $2\sqrt{6}$
- [2025·山东菏泽二模] 已知 $a > 1, b > 1$, 且 $ab = 4$, 则 $\log_2 a \cdot \log_2 b$ 的最大值为 ()
 A. $\frac{1}{4}$ B. 1
 C. 4 D. 16
- 已知 $-3 \leq a + b \leq -2, 1 \leq a - b \leq 4$, 则 $3a + b$ 的取值范围是 ()
 A. $[-3, 0]$ B. $[-5, 3]$
 C. $[-5, 0]$ D. $[-2, 5]$
- [2025·江苏扬州模拟] 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right\}$, 则不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 ()
 A. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}\right\}$
 B. $\{x \mid 2 < x < 3\}$
 C. $\{x \mid x > 3 \text{ 或 } x < 2\}$
 D. $\{x \mid -3 < x < -2\}$
- [2025·辽宁盘锦三模] 已知正数 m, n 满足 $4m + 6n = 1$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2m}{n}$ 的最小值为 ()
 A. $2 + 4\sqrt{3}$ B. $4 + 4\sqrt{3}$
 C. $7 + 4\sqrt{3}$ D. $7 + 2\sqrt{3}$

- [2025·湖南长沙模拟] 若 $x > 0, y > 0$, 且 $x + y = xy$, 则 $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{y-1}$ 的最小值为 ()
 A. 2 B. $2\sqrt{2}$
 C. 3 D. $\frac{9}{2}$
- [2025·福建福州模拟] 已知 $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \alpha + \beta + \gamma = \pi, \tan \gamma = \frac{3}{4}$, 则 $\tan \alpha \tan \beta$ 的最小值为 ()
 A. 3 B. 5
 C. 9 D. 25

二、多选题

- 已知 $a > b > 0 > c$, 则下列不等式中恒成立的是 ()
 A. $\frac{b}{a} < \frac{b-c}{a-c}$ B. $\frac{1}{a+c} > \frac{1}{b+c}$
 C. $\frac{a}{b-c} > \frac{b}{a-c}$ D. $a + \frac{c}{b} > b + \frac{c}{a}$
- [2025·黑龙江大庆模拟] 已知正数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则 ()
 A. $xy \leq \frac{1}{8}$
 B. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 8$
 C. $\sqrt{x} + \sqrt{2y} \geq \sqrt{2}$
 D. $x^2 + 4y^2 \geq \frac{1}{2}$

三、填空题

- [2025·北京人大附中模拟] 不等式 $\frac{2x+1}{3x-3} \leq 1$ 的解集为_____.
- [2025·天津红桥区模拟] 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x + c (x \in \mathbf{R})$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{1}{c} + \frac{4}{a}$ 的最小值为_____.

小题3 函数图象与函数解析式

(时间:30分钟 分值:62分)

一、单选题

1. [2025·辽宁沈阳二模] 已知 $f(x-1)=e^x$, 则 $f(2)=$ ()

A. e B. $2e$
C. e^2 D. e^3

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} (1-a)x+2a, & x<1, \\ x-\frac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 1)$ B. $(-1, +\infty)$
C. $[-1, 1)$ D. $(1, +\infty)$

3. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x>0$ 时, $f(x)=2^x-4$, 则不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集为 ()

A. $[-2, 2]$
B. $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$
C. $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$
D. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

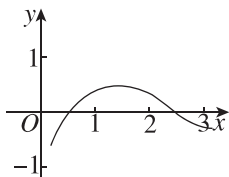
4. 如果 $F(x, y)$ 是函数 $f(x)=\sin x$ 的图象上一点, 那么 $G(x-\frac{\pi}{6}, y)$ 就是函数 $g(x)$ 的图象上一点, 则 $g(\frac{\pi}{6})=$ ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

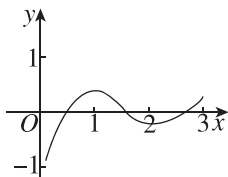
5. [2025·安徽马鞍山模拟] 若函数 $f(x)=\ln \frac{x+a}{x+1}+x$ 的图象关于点 $(2, 2)$ 对称, 且 $a \neq 1$, 则实数 $a=$ ()

A. -5 B. -1 C. 0 D. 5

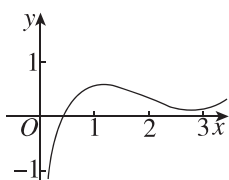
6. 函数 $y=\cos x+\ln x$ 的部分图象大致为 ()



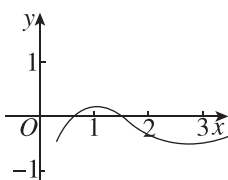
A



B



C



D

7. [2025·湖北黄冈模拟] 已知函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y^2)=f(x)+2[f(y)]^2$ 恒成立, 且 $f(1) \neq 0$, 则 $f(2025)$ 的值为 ()

A. 1012 B. $\frac{2025}{2}$ C. 1013 D. $\frac{2027}{2}$

8. 函数 $f(x)=e^x$ 与函数 $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ 的图象所有交点的横坐标之和为 ()

A. $-\ln 2$ B. $\ln 2$
C. 0 D. 1

二、多选题

9. [2025·湖南娄底模拟] 下列函数中, 其图象经过平移后可得到函数 $y=e^x$ 的图象的有 ()

A. $y=e^{x+1}$ B. $y=e^x-2$
C. $y=e^{2x}$ D. $y=\frac{e^x}{2}$

10. 已知定义在 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x \in [1, +\infty)$, $2f(x)=f(2x)$ 恒成立, 且当 $x \in [1, 2)$ 时, $f(x)=-x^2+3x-2$, 则下列结论中正确的是 ()

A. $f(3)=\frac{1}{2}$
B. $f(x)$ 在 $[4, 7]$ 上单调递增
C. 函数 $F(x)=f(x)-a$ 的零点从小到大依次记为 $x_1, x_2, x_3, \dots$, 若 $x_1+x_2=6$, 则 a 的取值范围为 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$
D. 若函数 $F(x)=f(x)-a$ 在 $[3, 16]$ 上恰有 4 个零点, 则 a 的取值范围为 $[\frac{1}{2}, 1)$

三、填空题

11. [2025·福建漳州模拟] 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数, 且对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+2)=f(-x)$, 则 $f(x)$ 的解析式可以是_____. (写出一个满足条件的函数解析式即可)

12. [2025·福建南平模拟] 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(2-x)=f(2+x)$, 且当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x)=(\frac{1}{2})^x-1$. 若关于 x 的方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0 (a>1)$ 在区间 $(-2, 6]$ 上恰有 3 个不同的实根, 则实数 a 的取值范围是_____.

班级	
姓名	
题号	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

小题4 基本初等函数、函数与方程

(时间:30分钟 分值:62分)

一、单选题

- [2025·天津红桥模拟] 设 $a=e^{-1}$, $b=\ln\frac{1}{2}$, $c=\log_2 3$, 则 ()
 A. $c < a < b$ B. $b < a < c$
 C. $c < b < a$ D. $a < c < b$
- [2025·云南丽江三模] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \geq 4, \\ f(x+1), & x < 4, \end{cases}$ 则 $f(2+\log_2 3)$ 的值为 ()
 A. 24 B. 4
 C. 12 D. 8
- [2025·山东泰安模拟] 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 - ax - 5)$ 在 $(5, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 4)$ B. $(-\infty, 4]$
 C. $(4, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$
- [2025·湖北十堰适应性考试] 函数 $f(x) = x + \ln x - 4$ 的零点所在的区间是 ()
 A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
 C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$
- [2025·甘肃兰州模拟] 已知函数 $f(x) = |2^x - 1|$, 关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有两个不等实数根, 则实数 k 的取值范围是 ()
 A. $(1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$
 C. $[0, 1]$ D. $(0, 1)$
- [2025·福建泉州质检] 如图, 假定 P, Q 两点以相同的初速度运动. 点 Q 沿射线 CD 做匀速直线运动, $CQ = x$; 点 P 沿线段 AB (长度为 10^7 个单位长度) 运动, 它在任何一点的速度值等于它尚未经过的距离 ($PB = y$). 令 P 与 Q 同时分别从 A, C 出发, 可知 x 与 y 的对应关系是 $y = 10^7 \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{10^7}}$, 其中 e 为自然对数的底数. 若点 P 从线段 AB 的中点运动到靠近 B 的四等分点, 点 Q 同时从 Q_1 运动到 Q_2 , 则 $\frac{CQ_1}{CQ_2} =$ ()
 A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. e D. $\frac{1}{e}$

- [2025·甘肃白银二模] 已知 $2025^m = 2024$, $x = 2024^m - 2023$, $y = 2026^m - 2025$, 则 ()
 A. $y < x < 0$
 B. $0 < x < y$
 C. $y < 0 < x$
 D. $x < 0 < y$
- [2025·北京海淀区三模] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0, \\ e^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - |x - k|$ 恰有 2 个零点, 则实数 k 的取值范围是 ()
 A. $[-1, e)$
 B. $(-\infty, -1] \cup [e, +\infty)$
 C. $(-1, 1]$
 D. $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$

二、多选题

- [2025·重庆育才中学模拟] 若 $e^{2a} - b = 1$, 则下列结论中正确的为 ()
 A. ab 有最大值
 B. ab 有最小值
 C. $\ln(b+2) - a$ 有最大值
 D. $\ln(b+2) - a$ 有最小值
- [2025·湖北华中师大附中模拟] 若函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 则下列说法中正确的是 ()
 A. $a > 3$
 B. $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)} = 0$
 C. 若 x_1, x_2, x_3 成等差数列, 则 $a + b = 2$
 D. 若 x_1, x_2, x_3 成等比数列, 则 $a^3 = 27b$

三、填空题

- [2025·河北衡水武强中学模拟] 设 $6^m = 2$, $6^n = 3$, 则 $m^2 + n^2 + 2mn =$ _____.
- [2025·江苏宿迁模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |e^{x+2} - 1|, & x \leq 0, \\ \ln x + 1, & x > 0, \end{cases}$ 若方程 $[f(x)]^2 = 2af(x) - a^2 + 3$ 有且仅有 5 个不同实数根, 则实数 a 的取值范围为 _____.

小题5 函数的性质

(时间:30分钟 分值:62分)

一、单选题

1. [2025·天津红桥区模拟] 下列函数中为偶函数的是 ()

A. $y = \cos x$ B. $y = \ln x$
C. $y = x^3$ D. $y = e^x$

2. 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x-2}{2^x}$, 则 $f(1) =$ ()

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$
C. 6 D. -6

3. [2025·四川绵阳模拟] 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, \frac{1}{2})$
B. $(\frac{3}{2}, +\infty)$
C. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
D. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$

4. [2025·陕西咸阳模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 1, & x < 1, \\ \frac{1}{x} - 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2]$ B. $[1, \frac{3}{2}]$
C. $[1, 2]$ D. $[2, +\infty)$

5. [2025·天津河北区模拟] 已知函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 则下列函数中是奇函数的是 ()

A. $y = f(|x|)$ B. $y = f(x^2)$
C. $y = x \cdot f(x)$ D. $y = f(x) + x$

6. [2025·广东佛山三模] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln(\sqrt{1+x^2} + x) + a, & x < 0, \\ \cos x, & x \geq 0, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-1, +\infty)$ B. $(-1, +\infty)$
C. $[0, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

7. [2025·广东惠州模拟] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+2)$ 为偶函数, $f(x+1)$ 为奇函数, 则 ()

A. $f(-\frac{1}{2}) = 0$ B. $f(-1) = 0$
C. $f(2) = 0$ D. $f(4) = 0$

8. 已知函数 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足下列性质:

①对任意的 $m, n \in \mathbf{R}$, $mg(n) - ng(m) = mn(n-m)$;

②对任意的 $m, n \in [1, 2]$, $g(mn) \geq g(m)g(n)$.

则下列说法一定正确的为 ()

A. $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上无最小值
B. $g(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上单调递减
C. $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有最小值
D. $g(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上单调递增

二、多选题

9. [2025·陕西商洛模拟] 若函数 $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$, 则 ()

A. $f(\sqrt{3}) = \sqrt{6}$
B. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
C. $f(x)$ 是奇函数
D. $f(x)$ 的最小值为 0

10. [2025·山东泰安模拟] 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x-y) - f(x+y) = f(x-1)f(y-1)$, 若 $f(0) = 2$, 则 ()

A. $y = xf(x)$ 为偶函数
B. 4 是函数 $f(x)$ 的一个周期
C. 点 $(2025, 0)$ 是 $f(x)$ 的图象的对称中心
D. $\sum_{i=0}^{2026} f(i) = 0$

三、填空题

11. [2025·甘肃白银模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0, \\ ae^{-x} - b, & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数, 则 $a + b =$ _____.

12. [2025·山西吕梁三模] 已知函数 $f(x) = \cos x(|\sin x| + 1)$, 若对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 _____.

班级

姓名

题号 答案区

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

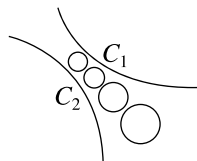
小题6 导数的几何意义

(时间:30分钟 分值:62分)

一、单选题

- 函数 $f(x) = x^3 - 7x^2 + 1$ 的图象在点 $(4, f(4))$ 处的切线的斜率为 ()
A. -8 B. -7
C. 6 D. -5
- 若函数 $f(x) = x - a \ln x$ 的图象在 $x=1$ 处的切线斜率为 3, 则 $a =$ ()
A. -2 B. -1
C. 1 D. 2
- $f(x) = e^x - 3x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 ()
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$
C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$
- 若直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ (b 为常数) 是函数 $f(x)$ 的一条切线, 则函数 $f(x)$ 不可能是 ()
A. $f(x) = \frac{1}{x}$
B. $f(x) = x^4$
C. $f(x) = \sin x$
D. $f(x) = e^x$
- [2025·广西南宁三模] 过点 $A(1, 1)$ 的直线 l 与曲线 $y = \ln(x-1) + 2$ 相切于点 B , 则 $|AB| =$ ()
A. 1 B. $\sqrt{2}$
C. 2 D. $2\sqrt{2}$
- [2025·河南驻马店模拟] 已知点 P 为曲线 $y = x + \frac{9}{x}$ 上的动点, 则点 P 到直线 $x + y = 0$ 的距离的最小值为 ()
A. $3\sqrt{2}$ B. 6
C. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ D. 9
- 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x + 7$, 直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 相切, 且直线 l 与曲线 $y = f(x)$ 有且只有一个公共点, 那么这样的直线 l 有 ()
A. 0 条 B. 1 条
C. 2 条 D. 3 条

- [2025·湖北荆州模拟] 一个小孩玩滚珠子游戏, 试图将大小不一的圆珠通过由曲线 C_1, C_2 形成的空隙 (如图), 曲线 C_1, C_2 可以近似看作函数 $y = e^{-x} - \frac{1}{2}, y = \ln(\frac{1}{2} - x)$ 的图象, 要使圆珠通过空隙, 则圆珠直径的取值范围为 ()



- A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(0, \ln 2)$
C. $(0, \frac{\sqrt{2}}{4})$ D. $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$

二、多选题

- [2025·甘肃庆阳三模] 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x+a}$, 则下列结论正确的是 ()
A. 当 $a=1$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=x$
B. 当 $a=1$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$
C. 当 $a=0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 上不存在斜率为 0 的切线
D. 当 $a=0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 0
- [2025·辽宁沈阳模拟] 若两曲线 $y = x^2 - 1$ 与 $y = a \ln x - 1$ 存在公切线, 则正实数 a 的值可能是 ()
A. 1 B. e
C. e^2 D. $2e$

三、填空题

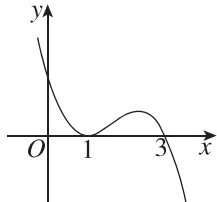
- [2025·四川巴中三模] 已知函数 $f(x) = x - 3 \ln x (x > 0)$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.
- 已知对于任意的 $a < 0$, 过点 (a, b) 可作曲线 $f(x) = xe^{-x}$ 的 3 条不同的切线, 则实数 b 的取值范围为_____.

小题7 导数与函数的单调性、极值、最值

(时间:30分钟 分值:62分)

一、单选题

1. [2025·广东东莞模拟] 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示,则 ()



- A. $f(x)$ 有 2 个极值点
 B. $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值
 C. $f(x)$ 有极大值,没有极小值
 D. $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减
2. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 2x^2 - 3x + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,则实数 a 的取值范围为 ()
 A. $[-\frac{4}{9}, +\infty)$ B. $[-\frac{4}{3}, +\infty)$
 C. $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ D. $(-\infty, -\frac{4}{9}]$
3. [2025·河南安阳三模] 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 的极小值为 6,则实数 a 的值为 ()
 A. 8 B. 6
 C. 4 D. 2
4. [2025·河南驻马店模拟] 函数 $f(x) = x + \cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的最大值为 ()
 A. π B. $\frac{\pi}{2} + 1$
 C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\pi - 1$
5. [2025·重庆三模] 若函数 $f(x) = -3^x - x + a$ 在 $(0, 1)$ 上有零点,则 a 的取值范围为 ()
 A. $(1, 4)$ B. $(-4, 0)$
 C. $(0, 4)$ D. $(-\infty, 4)$
6. [2025·湖北宜昌一中模拟] 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln x$,在其公共定义域内,下列结论正确的是 ()
 A. $f(x) \geq g(x)$ 恒成立
 B. $f(x) \leq g(x)$ 恒成立
 C. $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ 恒成立
 D. $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ 恒成立

7. [2025·湖北黄冈三模] 已知函数 $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$,则 $f(x)$ 的最小值是 ()

A. $-\sqrt{5}$ B. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
 C. $-2\sqrt{2}$ D. -3

8. 已知当 $x > 0$ 时, $e^{x \ln x} - 2x \ln x \geq a$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 1]$
 B. $(-\infty, 2 - 2\ln 2]$
 C. $(-\infty, 2\ln 2]$
 D. $(-\infty, 2 + 2\ln 2]$

二、多选题

9. [2025·江苏连云港模拟] 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$,则 ()

A. $f(x)$ 的图象在 $x=3$ 处的切线方程为 $y=0$
 B. $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减
 C. $f(x)$ 的最大值是 $\frac{32}{3}$
 D. $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -3)$

10. [2025·四川成都模拟] 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - (4x + 1)\ln x$,则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 有四个单调区间
 B. $f(x)$ 存在最小值
 C. $f(x)$ 有三个极值点,从小到大依次为 a, b, c ,则 a, b, c 成等差数列
 D. $f(x)$ 有三个极值点,从小到大依次为 a, b, c ,则 a, b, c 成等比数列

三、填空题

11. [2025·辽宁盘锦三模] 已知函数 $f(x) = e^x - mx - 2$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $x - y = 0$ 垂直,则 $f(x)$ 的极小值为_____.

12. 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2 - ax$ ($a \in \mathbf{R}$),若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,且 $x_1 \in (0, 1]$,则 $f(x_1) - f(x_2)$ 的最小值为_____.

班级

姓名

题号 答案区

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

小题8 导数中的函数构造问题

(时间:30分钟 分值:62分)

一、单选题

- 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x) \leq 1$ 恒成立, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) \leq x$ 的解集为 ()
A. $\mathbf{R}$ B. $(-\infty, 0]$
C. $[1, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$
- 若 $\ln x + y^{-2} > \ln y + x^{-2}$, 则 ()
A. $e^{x^2} > e^{xy} > 1$
B. $e^{xy} > e^{x^2} > 1$
C. $e^{x^2} > 1 > e^{xy}$
D. $1 > e^{x^2} > e^{xy}$
- [2025·上海大同中学三模] 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a^2 > b^2$ ”是“ $2a - \sin a > 2b - \sin b$ ”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
- 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f'(x) > 1$, $f(1) = 3$, 则不等式 $e^x f(x) > e^x + 2e$ 的解集为 ()
A. $(2, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(-\infty, 2)$ D. $(-\infty, 1)$
- 设 $a = \frac{e^2}{4 - \ln 4}$, $b = \frac{2}{\ln 2}$, $c = e$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
A. $a < c < b$
B. $a < b < c$
C. $c < a < b$
D. $b < c < a$
- 设 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, $xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$, 且 $f(1) = 0$, 则 ()
A. $f(2) < f(3) < f(5)$
B. $f(3) < f(2) < f(5)$
C. $f(5) < f(3) < f(2)$
D. $f(5) < f(2) < f(3)$

- 已知函数 $f(x) = -\frac{x}{e^x}$, 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1$ 且满足 $ae^{a+1} = be^b$, 则 ()
A. $f(a) > f(b)$
B. $f(a) < f(b)$
C. $f(a) = f(b)$
D. $f(a), f(b)$ 的大小关系不能确定
- [2025·湖北黄冈模拟] 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $e^\alpha - 2\sin \alpha - 1 = e^\beta - 2\cos \beta = 0$, 则 ()
A. $\alpha > \beta$
B. $\alpha = \beta$
C. $\alpha < \beta$
D. 无法确定 α, β 的大小

二、多选题

- [2025·内蒙古呼和浩特模拟] 下列命题为真命题的是 ()
A. $\pi \ln 2 > 2 \ln \pi$
B. $\ln 3 < \sqrt{3} \ln 2$
C. $e^{\frac{2}{e}} > 2$
D. $3e \ln 2 < 4\sqrt{2}$
- 已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f(1) = 0$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 且当 $x < 0$ 时, $3f(x) + xf'(x) < 0$, 则 ()
A. 当 $x < -1$ 时, $f(x) < 0$
B. $f'(1) > 0$
C. $f(2) > 8f(4)$
D. $f(\frac{1}{2}) < f(\frac{1}{4})$

三、填空题

- [2025·宁夏石嘴山模拟] 对任意的 $x_1, x_2 \in [1, e]$, 且 $x_1 \neq x_2$, 不等式 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < m$ 恒成立, 则 m 的取值范围为_____.
- 若正实数 x, y 满足 $\frac{x - \ln x + \ln y}{y} \geq \frac{e^{x-1}}{x}$, 则 xy 的最大值为_____.

解答 1 三角函数的性质及应用

(时间:20 分钟 分值:26 分)

解答题(本大题共 2 小题,共 26 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. [2025 · 广西南宁模拟] 设函数 $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 图象的对称中心;

(2) 若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上有最小值 -1 , 求实数 m 的最小值.

(本小题满分 13 分)

答 题 区 域

2. [2025 · 湖北襄阳四中模拟] 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度后得到 $y = g(x)$ 的图象, 当函数 $y = g(x) - k$ 在 $\left[0, \frac{7\pi}{3}\right]$ 上有且只有一个零点时, 求实数 k 的取值范围.

(本小题满分 13 分)

答 题 区 域

解答 2 利用正、余弦定理判定三角形形状

(时间:20 分钟 分值:26 分)

解答题(本大题共 2 小题,共 26 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 已知钝角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2a \sin B \cos(B-A) = -b \sin 2A + 2a \sin B \cos C$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $a+c=4, b=2\sqrt{3}$, 证明: $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(本小题满分 13 分)

答 题 区 域

2. [2025 · 广东惠州模拟] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $A = \frac{\pi}{3}, a = 4$.

(1) 若 BC 边上的高 $AD = 2\sqrt{3}$, 求证: $\triangle ABC$ 为等边三角形;

(2) 已知 AM 为 $\angle BAC$ 的平分线, 且与 BC 交于点 M , 若 $AM = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

(本小题满分 13 分)

答 题 区 域

解答 3 证明三角形中的恒等式或不等式

(时间:25 分钟 分值:28 分)

解答题(本大题共 2 小题,共 28 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. [2025·北京东城区一模] 在 $\triangle ABC$ 中, $a=6, b-c=1, \sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

(1)求 b 的值及 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)求证: $A=2C$.

(本小题满分 13 分)

答 题 区 域

2. [2025·河北衡水联考] 记锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \cos A + b \cos B = 2c \cos C$.

(1)证明: $\frac{\sin A}{\cos B} + \frac{\sin B}{\cos A} = 4 \sin C$;

(2)求 $\frac{\tan A \tan B}{\tan^2 C}$ 的最大值.

(本小题满分 15 分)

答 题 区 域

解答 4 求三角形中的边长、周长、面积的最值或范围

(时间:25 分钟 分值:30 分)

解答题(本大题共 2 小题,共 30 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

(1)若 BC 边上的高为 1,求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值;

(2)若 $a = \sqrt{3}$,求 $\triangle ABC$ 的周长的最大值.

(本小题满分 15 分)

答 题 区 域

2. [2025·四川成都模拟] 如图,在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,且 $2b \cos C = 2a - c$.

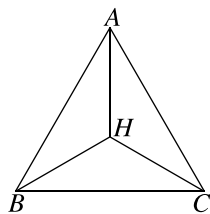
(1)求角 B 的大小.

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,点 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, $BH = 6$,设 $\angle HBC = \alpha$.

(i)若 $\alpha = \frac{\pi}{6}$,求 $\triangle ABC$ 的面积;

(ii)求 $AH + CH$ 的取值范围.

(本小题满分 15 分)



答 题 区 域

解答 5 平面几何图形中的计算

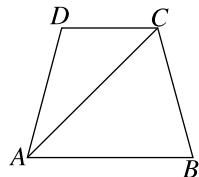
(时间:25 分钟 分值:30 分)

解答题(本大题共 2 小题,共 30 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. 如图,在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB^2 = BC^2 + AC^2 - AC \cdot BC$, $\sqrt{2}AB = \sqrt{3}BC$, $AC = 3 + \sqrt{3}$, $\angle BAC + \angle ACD = \angle ACB + \angle CAD = \frac{\pi}{2}$.

- (1)求 $\triangle ABC$ 的周长;
(2)求平面四边形 $ABCD$ 的面积.

(本小题满分 15 分)

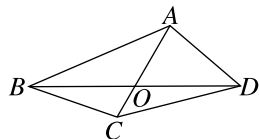


答 题 区 域

2. [2025 · 黑龙江齐齐哈尔二模] 如图,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 与 BD 交于点 O , $\angle AOD = \frac{\pi}{3}$, $AC = 3$, $BD = 6$,且 $AD = BC$.

- (1)求 BO 的长;
(2)若 $7\sin\left(2\angle OCB - \frac{\pi}{6}\right) = 8\sqrt{7}\cos\angle ODA - 15$,求 $\cos\angle ODA$ 的值.

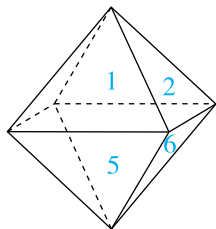
(本小题满分 15 分)



答 题 区 域

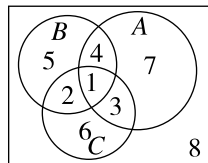
拓展 1 集合与事件关系

1. [人教 A 版必修二 P253 综合运用 T5 改编] 如图, 一个正八面体的八个面分别标以数字 1 到 8, 任意抛掷一次这个正八面体, 观察它与地面接触的面上的数字, 得到样本空间为 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 记事件 $A =$ “得到的点数为偶数”, 事件 $B =$ “得到的点数不大于 4”, 事件 $C =$ “得到的点数为质数”, 则下列说法正确的是 ()
- A. 事件 B 与 C 互斥, A 与 C 互为对立



- B. $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$
- C. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 但不满足 A, B, C 两两独立
- D. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 且 A, B, C 两两独立
2. [人教 A 版必修一 P35 拓广探索 T11 改编] 学校举办运动会时, 高一(1)班共有 28 名同学参加比赛, 有 15 人参加游泳比赛, 有 8 人参加田径比赛, 有 14 人参加球类比赛, 同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人, 同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人, 没有人同时参加三项比赛, 则同时参加田径比赛和球类比赛的有 _____ 人, 只参加游泳一项比赛的有 _____ 人.
3. [人教 A 版必修二 P247 拓广探索 T15] 如图是某班级 50 名学生订阅数学、语文、英语学习资料的情况, 其中 A 表示订阅数学学习资料的学生, B 表示订阅语文学习资料的学生, C 表示订阅英语学习资料的学生.
- (1) 从这个班任意选择一名学生, 用自然语言描述 1, 4, 5, 8 各区域所代表的事件;
- (2) 用 A, B, C 表示下列事件:
- ① 至少订阅一种学习资料;
- ② 恰好订阅一种学习资料;
- ③ 没有订阅任何学习资料.

(本小题满分 17 分)



答 题 区 域

4. 从装有 2 个红球和 2 个白球(球除颜色外其他均相同)的口袋中任取 2 个球, 用集合的形式分别写出下列事件, 并判断每对事件的关系:
- (1) 至少有 1 个白球, 都是白球;
- (2) 至少有 1 个白球, 至少有 1 个红球;
- (3) 至少有 1 个白球, 都是红球.

(本小题满分 17 分)

答 题 区 域

拓展2 反函数

【教材溯源】人教A版必修一P135探究与发现

1. 已知指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 与对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 互为反函数, 它们的定义域和值域正好互换. 若方程 $e^x+x=2$ 与 $\ln x+x=2$ 的解分别为 x_1, x_2 , 则下列结论中错误的是 ()

A. $x_1+x_2=2$

B. $x_2-x_1>1$

C. $x_1 e^{x_1} = x_2 \ln x_2$

D. $\frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2}$

2. (多选题) 设函数 $f(x)=a^x, g(x)=\log_a x, a>0$ 且 $a\neq 1$, 则 ()

A. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称

B. 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象的交点均在直线 $y=x$ 上

C. 若 $g(x)$ 的图象经过点 $(4, 2)$, 则 $f(x)=2^x$

D. 已知 $a>1$, 若 $f[f(x)]>x>g[g(x)]$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 $(e^{\frac{1}{e}}, e^e)$

3. 已知函数 $f(x)=e^x$ 与函数 $g(x)$ 互为反函数, 若 P, Q 分别为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象上的一点, 则 $|PQ|$ 的最小值为 _____.

4. 我们知道, 函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$) 与 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$) 互为反函数. 一般地, 设 A, B 分别为函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域, 如果由函数 $y=f(x)$ 可解得唯一的 $x=\varphi(y)$, 且 $x=\varphi(y)$ 也是一个函数解析式 (即对任意一个 $y\in B$, 都有唯一的 $x\in A$ 与之对应), 那么就称函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$. 在 $x=f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是 y 的函数. 习惯上改写成 $y=f^{-1}(x)$ ($x\in B, y\in A$) 的形式. 反函数具有一些性质, 如: ①如果 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数, 那么 $y=f(x)$ 也是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数; ②互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称; ③一个函数与它的反函数在相应区间上的单调性是一致的.

(1) 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(2, 3)$ 处切线的倾斜角为 60° , 求其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象在点 $(3, 2)$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $g(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ ($a>0, a\neq 1$), 试求其反函数 $y=h(x)$, 并判断单调性;

(3) 在(2)的条件下, 证明: 当 $a\geq e$ 时, $\forall x\in[0, +\infty), h(x)\geq x$.

(本小题满分 17 分)

答 题 区 域

拓展3 三次函数

【教材溯源】人教A版必修一P87 拓广探索T13 以及选择性必修二第五章例题与习题

1. (多选题)若函数 $f(x) = x^3 - 9x^2 + bx + c$ ($b, c \in \mathbf{R}$) 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 则下列说法正确的是 ()
- A. $b < 27$
B. 若 $b = 15$, 则函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值
C. 若函数 $f(x)$ 的三个零点 x_1, x_2, x_3 成等差数列, 则 $f(3-x) + f(3+x) = 0$
D. $\frac{f'(x_3)}{f'(x_1)} + \frac{f'(x_3)}{f'(x_2)} = -1$
2. (多选题)已知函数 $f(x) = (x-1)^4 - 2x^2 + 4x + 2$, 若方程 $f(x) = m$ 有四个不同的根 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则下列说法正确的是 ()
- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称
B. $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点
C. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上存在最大值, 则 $b - a$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$
D. 存在 m 使得 x_1, x_2, x_3, x_4 成等差数列
3. 已知三次函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 在 $x = -\frac{1}{3}$ 和 $x = 1$ 处取得极值, 且 $f(x)$ 的图象在 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $y = kx + 4$.
- (1) 若函数 $g(x) = f(x) - mx$ 的图象上有两条与 x 轴平行的切线, 求实数 m 的取值范围;
(2) 若函数 $h(x) = 2x^2 + 8x + n$ 的图象与 $f(x)$ 的图象在 $[-2, 1]$ 上有两个交点, 求实数 n 的取值范围.

(本小题满分 17 分)

答 题 区 域

4. [人教A版必修一教材P87T13 改编] 有以下阅读材料: 我们知道, 函数 $y = f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 有同学发现可以将其推广为: 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数.
- (1) 已知函数 $f(x) = mx^3 - nx + 5$, 且 $f(5) = 3$, 求 $f(-5)$ 的值.
(2) 已知函数 $g(x) = x^3 - 9x^2 - 6x + 73$.
- ① 求 $g(x)$ 的图象的对称中心.
② 在研究教材的时候, 某同学发现可以将其推广为: 若函数 $y = g(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称, 则 $g(2a-x) + g(x) = 2b$, 又已知 $g(x)$ 为定义在 $(0, 6)$ 上的减函数, 请根据该结论求不等式 $g(x^2) + g(x) > 2$ 的解集.

(本小题满分 17 分)

答 题 区 域